特殊相対性理論

静止系 (4次元空間) から観測される慣性系 (4次元空間) の物理量は静止系の物理量の慣性系への座標変換したものである.

３次元空間の座標変換において距離が保存される(不変である)のと同様に,時空間(4次元空間)の上記座標変換においても世界距離 dS^2 は保存される(不変である).

慣性系は静止系と相対的に速度Uで運動している．質量mの物体が静止系で静止しているとする．その時，静止系においては時間dtのみが経過する.

慣性系においては時間dt'が経過し, その間に物体mは距離Udt'だけ移動する.

C ： 静止系における光速

C' ： 慣性系における光速

U ： 静止系と慣性系との相対速度

dt ： 静止系において経過した微小時間

dt'： 慣性系において経過した微小時間

m ： 物体の質量

$\beta^2 = U^2/C^2$

両系における世界距離dS^2 は等しいから，次の等式（１）が成立する.

$$-dS^2 = C^2dt^2 = C^2dt'^2 - U^2dt'^2$$

$$dt^2/dt'^2 = 1 - \beta^2$$

（１）　$$dt = dt'\sqrt{1-\beta^2}$$

光の伝播する距離は両系において等しいから，次の等式（２）が成立する.

$$C'^2dt'^2 = C^2dt^2$$

$$C'^2 = C^2dt^2/dt'^2 = C^2(1-\beta^2)$$

（２）　$$C' = C\sqrt{1-\beta^2}$$

ここで, 物体mが静止系において速度vで運動しているとする.

物体mが運動して移動する距離は両系において等しいから，次の等式（３）が成立する．物体 mは慣性系において速度v'で運動しているとする.

$$v'^2dt'^2 = v^2dt^2$$

$$v'^2 = v^2(1-\beta^2)$$

（３）　$$v' = v\sqrt{1-\beta^2}$$

静止系において速度vで運動している物体mが力Fによって加速されるとき,慣性系においても物体mは同じ力Fで加速される．そのとき,次の等式が成立する.

$$v = v'/\sqrt{1-\beta^2} \qquad dt = dt'\sqrt{1-\beta^2}$$

$$F = m(dv/dt) = m(dv'/dt')\,/(1-\beta^2) = m'(dv'/dt')$$

次の等式（４）が成立する．

（４）　$m\,/(1-\beta^2) = m'$

それ故，物体mが静止系において速度vで運動すると，慣性系においては質量m'の物体が速度v'で運動しているように見える．

等式（２）から次の等式は導出される．

$$C'^2 = C^2 - U^2$$

$$mC'^2 = mC^2 - mU^2$$

上記mU^2はエネルギーであるから，mC^2もエネルギーである（**補足４**を参照）．そして，mC^2のエネルギー量は質量mのみに依存する．

そうすると，mC^2 それ自体が質量mのエネルギー量であると言える．

エネルギー量は静止系か慣性系かに関わらずに不変であるから，等式（３）と同じ等式が成立する．

$$m'C'^2 = mC^2$$

$$m' = mC^2/C'^2 = m/(1-\beta^2)$$

強力な重力場において放出された光の振動数は無限遠方では低くなって観測される．これは光の波長が長くなって観測されるということである．重力による光の赤方偏移と呼ばれている．

ν：静止系における光の振動数

ν'：慣性系における光の振動数

両系における光の総振動数は等しいから，上記等式（３）と同じ等式が成立する．

$$\nu dt = \nu' dt' \quad dt = dt'\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\nu dt'\sqrt{1-\beta^2} = \nu' dt'$$

$$\nu\sqrt{1-\beta^2} = \nu'$$

このような赤方偏移が生じる場合は，光を放出する物体が観測系（静止系）に対して高速で相対運動している（接近か否かを問わない）場合または強力重力場を形成している場合等が考えられる．

ニュートン力学的なドップラー効果は関係ない．

コペルニクス的相対性理論

アインシュタインの重力場方程式のシュバルトシルト解は球対称の重力場の局所空間（局所慣性系）の世界距離dS^2を球座標により表現するものである．

しかし，その局所空間（局所慣性系）は完全な慣性系ではない．そのため世界距離dS^2は径軸Rの非線形歪を含んでいる．

その局所空間（局所慣性系）では時間t'が径軸R方向に連続的に変化しているために，その世界距離dS^2は径軸Rの非線形歪を含まざるを得ないからである．

しかし，世界距離dS^2は径軸Rの非線形歪を含むために，光や物体の重力場における運動を描写することが非常に困難である．

そこで，以下では，局所空間（局所慣性系）では時間t'の径軸R方向の連続的な変化にしたがって光はその速度C'と伝播方向を変えながら伝播すると想定することにより前記困難を解消するものである．

何故なら，局所空間（局所慣性系）の径軸Rは非線形に歪ませる必要がないからである．

まず，局所空間（局所慣性系）における時間t'と光速C'について検討する．

局所空間（局所慣性系）は静止系（非重力場）に対して速度$U(R)$で運動しているとする．その局所空間（局所慣性系）はC（光速）を係数とする時間軸t'と径軸Rと回転角θとを有する３次元空間で表現される．静止系（非重力場）はC（光速）を係数とする時間軸tと径軸Rと回転角θとを有する３次元空間で表現される．

静止系から局所慣性系への座標変換（ローレンツ変換）において，世界距離dS^2は保存される．

それ故，次の等式が成立する

C' ： 局所慣性系における光速

C ： 静止系における光速

dt' ： 局所慣性系における経過時間

dt ： 静止系における時間経過

i ： 虚数 $i^2 = -1$

dS^2 ： 時間dtだけが経過する静止系における世界距離

dS'^2 ：時間dt'が経過するとともに距離$U(R)dt'$だけ移動する局所慣性系における世界距離．

$dS^2 = (iCdt)^2$

$dS'^2 = (iCdt')^2 + (U(R)dt')^2$

$dS^2 = dS'^2$

$(iCdt)^2 = (iCdt')^2 + (U(R)dt')^2$

光が伝播する距離は両系で同一であるから，次の等式が成立する．

$$C'dt' = Cdt$$

上記等式は次の等式（４）を導出する．

（４）　$C'^2 = C^2 - U^2$ ，　$U = U(R)$

物体m $(\ll M)$ が速度vで無限遠方から点質量Mの重力場に侵入するとき，次の等式（５）が成立する．

次の等式（５）の導出については**補足１**を参照．

（５）　$U^2 = 2GM/R$

等式（５）を用いて，等式（４）は次のように書き換えられる．

（６）　$C'^2 = C^2 - 2GM/R$

$C'^2 = 0$のとき，　$C^2 - 2GM/R = 0$

$Rs\ (= 2GM/C^2)$ ： シュバルトシルト半径

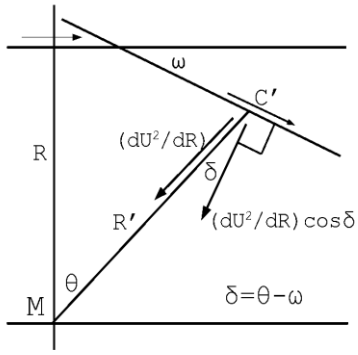

Fig.1

まず，図１ように点質量Mからの距離Rの点を直交して光は伝播するとする．

その後，図1のように点質量Mからの距離R'の点に光は到達しているとする．

$$\delta = \theta - \omega > 0$$

光は点質量Mの周りを角度θだけ回転している．

光はその伝播方向を角度ωだけ回転している．

光の伝播方向の変化の加速度$C'(d\omega/dt')$は重力加速度$dU^2 cos\delta/dR$に等しいとする．

そうすると次の等式（７）が成立する．

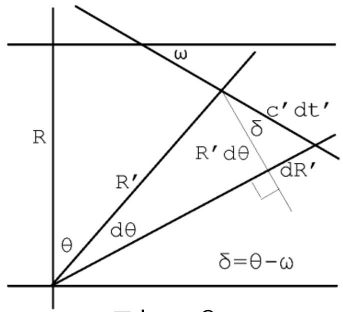

Fig.2

（７）　$C'(d\omega/dt') = (dU^2/dR)cos\delta$

$$= C'(d\omega/d\theta)(d\theta/dt')$$

図２のように次の等式が成立する．

$$d\theta/dt' = C'cos\delta/R'$$

上記等式を用いて等式（６）は次のように書き換えられる．

$$d\omega/dt' = (d\omega/d\theta)(C'cos\delta/R') = 2GMcos\delta/C'R'^2$$

（８）　$d\omega/d\theta = 2GM/C'^2R'$

等式（６）を用いて等式（８）は次の等式（９）ように書き換えられる．

$$d\omega/d\theta = (2GM/C^2R')/(1 - 2GM/C^2R')$$

$$Rs = 2GM/C^2$$

（９）　$$d\omega/d\theta = (Rs/R')/(1 - Rs/R')$$

$$R' = R/cos\delta \qquad\qquad 2Rs < R$$

上記等式の導出については**補足２**を参照

シュバルトシルト解とコペルニクス的相対性理論

ここでは点質量Mを中心に有する球対称な重力場における局所空間(局所慣性系)におけるシュバルトシルト解が検討される.

次のように物理量が表記される.

R ： 光が径軸に直交するときの点質量Mからの距離

R' ： 点質量Mからの光の距離

C ： 時間軸の係数そして静止系における光速

C' ： 局所空間（局所慣性系）における光速

θ ： 点質量Mの周りの光の回転角

ω ： 光の回転角θのときの光の伝播方向の回転角

d ： 微小変化 即ち 微分

G ： 重力定数

$Rs(=2GM/C^2)$ ： シュバルトシルト半径

アインシュタインの重力場方程式のシュバルトシルト解は次のように表記される.

$$-dS^2 = C^2(1-Rs/R')dt'^2 - dR'^2/(1-Rs/R') - R'^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\Phi^2)$$

上記シュバルトシルト解は次の等式（１３）のように書き換えられる.

$$C'^2 = C^2(1- Rs/R') \qquad d\Phi = 0$$

$$1/(1-Rs/R') = 1 + (Rs/R')/(1-Rs/R')$$

（１３） $-dS^2 + (Rs/R')dR'^2/(1-Rs/R') = C'^2dt'^2 - dR'^2 - R'^2d\theta^2$

等式（１３）の右辺は図２に示されるように0である.

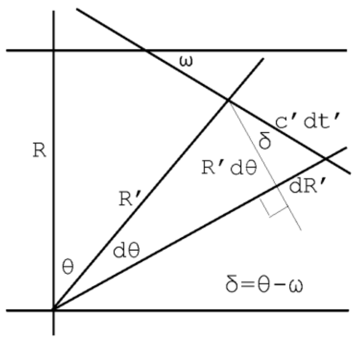

Fig. 2

前節の次の等式（９）を用いて

（９） $d\omega/d\theta = (Rs/R')/(1-Rs/R')$

上記等式(13)は次の等式(15)のように書き換えられる.

(15) $-dS^2 + (d\omega/d\theta)dR'^2 = C'^2dt'^2 - dR'^2 - R'^2d\theta^2 = 0$

物理量$(d\omega/d\theta)dR'^2$がシュバルトシルト解の世界距離dS^2における径軸R'の歪に相当することを上記等式(15)は示している.

等式（15）の右辺は径軸R'の非線形歪を含んでいないから，非線形量$(d\omega/d\theta)dR'^2$が世界距離dS^2における径軸R'の歪を打ち消していることは明らかである.

では何故，このようなことが生じたのかについて以下に検討する.

$d\omega/d\theta$は光が距離$C'dt'$を伝播するときの光の微小回転角$d\theta$と光の伝播方向の微小回転角$d\omega$の比である．

局所空間（局所慣性系）において径軸方向の加速度$dU^2/dR'(= -2GM/R'^2)$のために光は真っ直ぐ伝播できないで伝播方向が径軸R'方向に加速される．

上記の如く，光は微小回転角$d\theta$だけ回転する間に光の伝播方向は微小回転角$d\omega$だけ回転する．

シュバルトシルト解においては重力場における光の曲がり $(d\omega/d\theta)dR'^2$ を補償するように径軸R' が歪んでいる．

局所空間（局所慣性系）を光がその速度C'と伝播方向を変えながら伝播すると想定した場合には局所空間（局所慣性系）の径軸R'は歪ませる必要がない．しかし，局所空間（局所慣性系）を光が光速Cで直進すると想定した場合（シュバルトシルト解）には局所空間（局所慣性系）の径軸R'は歪ませざるを得ない．

それ故, シュバルトシルト解においては径軸R'の歪のために光は曲がって伝播するように見える．

ただ，何れが真であるかは確かめようがない．

しかし，局所空間（局所慣性系）において光はその光速C'と伝播方向を変えながら伝播すると想定すると径軸R'は歪ませる必要がない. そのためシュバルトシルト解のように光が光速Cで径軸R'の歪に沿って伝播するとする場合に比較して光の伝播や物体の運動を視覚的に判りやすく表記できる．

これはコペルニクス的な転回と言える．

シュバルトシルト解では重力場のエネルギーは径軸R'の歪に基づいている．

径軸R'が歪んでいないとき重力場のエネルギー（**補足6**を参照）は加速度空間に含まれると考えられる．

径軸R'の歪のエネルギーと加速度空間のエネルギーは等しいと考えられる．

径軸R'の歪の伝播（重力波）は加速度の変化の伝播（加速度波）に相当する．

ブラックホール

$R = \gamma Rs\ (1 < \gamma < 2)$により決定されるブラックホール$BH_M$ が検討される．
次の等式の導出には**補足５**を参照．

$$R' = Rcos\delta$$

上記等式を用いて，等式は次のように書き換えられる．

$$d\omega/d\theta = (Rs\ /Rcos\delta)/(1 - Rs\ /Rcos\delta)$$

$R = \gamma Rs\ (1 < \gamma < 2)$のとき上記等式は次のように書き換えられる．

（10）　$d\omega/d\theta = 1/(\gamma cos\delta - 1) > 1$

上記等式(10)は光の軌跡が螺旋状であることを示している．言い換えれば、シュバルトシルト半径Rsの２倍以内の重力場に侵入した光はその重力場を脱出できないということである．

それ故，質量Mの質量半径R_M（**補足７**を参照）がシュバルトシルト半径Rsよりも大きくその２倍よりも小さいとき，質量MはブラックホールBH_Mである．

（11）　$Rs < R_M < 2Rs$

その質量半径R_Mがシュバルトシルト半径Rsよりも小さい天体物質Mは存在しない．

何故ならば，質量半径R_Mがシュバルトシルト半径Rsよりも小さいとき，いかなる物理量（時空間，光や物質，電荷等）も存在しえない空間？が発生することになり，そのような事態は物理的に不可能であるからである．

それ故，質量半径R_Mがシュバルトシルト半径Rsよりも小さくなろうとするとき，そのブラックホールBH_Mは爆発し，その質量Mは四散し，そのブラックホールBH_Mは消滅すると考えられる．

ブラックホールBH_Mの見かけ上のM_Bは次のように算出される．

$$M\ /(1 - \beta) = M_B$$

$$\beta = U^2/C^2 \qquad U^2 = 2GM/R_M \qquad Rs = 2GM/C^2$$

$$\beta = U^2/C^2 = 2GM/C^2R_M = Rs/R_M$$

（12）　$M\ /(1 - Rs/R_M) = M_B$

上記等式(12)から明らかなように，質量半径R_Mがシュバルトシルト半径Rsに接近するにつれて，ブラックホールBH_Mの見かけ上の質量M_Bは無限に増大することになる．

ブラックホールBH_Mの見かけ上の質量M_Bは超巨大ブラックホールBH_{SM}の存在を可能にすると考えられる．そのような超巨大ブラックホールBH_{SM}はあらゆる銀河の中心に存在すると考えられる．しかし，上記したように超巨大ブラックホールBH_{SM}は爆発して消滅する運命にあるから，そのような超巨大ブラックホールBH_{SM}の存在はその銀河の最後の姿とも言える．

補足１

物体m ($\ll M$) が速度vで無限遠方から点質量Mの重力場に侵入するとき，次の等式が成立する．物体mは局所慣性系 (重力場) に在るとする．

R：物体mの点質量Mからの距離

g ($= GM/R^2$) ：物体mに作用する重力加速度

v ：物体mの無限遠方での速度

V' ：物体mの局所慣性系 (重力場) における速度

$F(= mg)$ ：局所慣性系 (重力場) において物体mに作用する力

$$(iCdt')^2 + (Udt')^2 + (vdt')^2 = (dS')^2 = (iCdt')^2 + (V'dt')^2$$

$$(Udt')^2 + (vdt')^2 = (V'dt')^2$$

$$V'^2 = v^2 + U^2$$

$$mV'^2/2 = mv^2/2 + mU^2/2$$

$$d(mv^2/2)/dR = 0$$

エネルギーEをRで微分するとその質量Mに作用する力Fが得られる. 言い換えると，$dE = FdR$である．$E = mV'^2/2$であるから次の等式が成立する.

$$d(mV'^2/2)/dR = d(mU^2/2)/dR = -F = -mg = -mGM/R^2$$

$$dU^2/dR = -2GM/R^2$$

（５）　$U^2 = 2GM/R$

補足２

図２を参照して，$\theta - \omega > 0$のとき，R'は
次のようにして得られる．

$\delta = \theta - \omega$

$dR' = C'dt'sin\delta$

$d\theta/dt' = C'cos\delta/R'$

$dR'/dt' = (dR'/d\theta)(d\theta/dt') = C'sin\delta$

$(dR'/d\theta)(C'cos\delta/R') = C'sin\delta$

$d(logR')/d\theta = sin\delta/cos\delta = -d(log(cos\delta))/d\delta$

$logR' = -log(cos\delta) + log\ A$

A：積分定数

$R'cos\delta = R'cos(\theta - \omega) = A$

光が径軸Rと直交する$(\theta = \omega = 0)$とき，　$R' = R$

それ故，$R = A$

$R' = R/cos\delta$

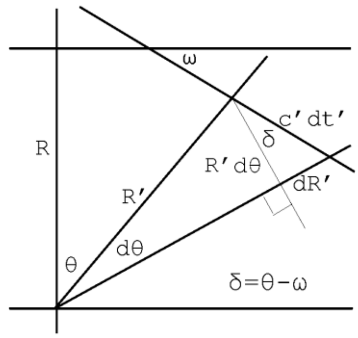

Fig. 2

補足３

μ粒子の寿命と走行距離

非常に高いエネルギーをもつ一次宇宙線は大気上空の原子と衝突して高エネルギー（速さv）のミュー粒子μをつくる。このミュー粒子μは$6km$位の高空から地上に達することが知られている。

地上で測定すると、静止状態のミュー粒子μは平均寿命$\tau(=2.15\times10^{-6}\mathrm{sec})$で電子$(e^{-})$と中性微子（ニュートリーノ、$\gamma_{\mu}$）に崩壊する。

いかなる粒子も光速$C(=3.0\times10^{8}m/s)$を越えられないので，このミュー粒子μの平均走行距離は高々$\tau\times C=2.15\times10^{-6}sec\times3.0\times10^{8}m/s=645m$であり、$6km$の距離を走行して地上に達することはできないことになる。

そこで以下において, 地上に到達可能であることを相対論的に検証する.

ミュー粒子μの平均寿命$\tau(=2.15\times10^{-6}\mathrm{sec})$は静止系でのことであるから，ミュー粒子$\mu$を静止系とする．その静止系では時間$dt=\tau$が経過した後，そのミュー粒子$\mu$は崩壊する．その世界距離は次のとおりである.

$$dS^2=C^2dt^2=C^2\tau^2$$

地上を慣性系とする．その慣性系では，時間dt'の間にμ粒子は速度vで$6km$だけ移動した後，ミュー粒子μは崩壊する．その世界距離は次のとおりである.

$$dS^2=C^2dt'^2-(6\times10^3)^2$$

両方の世界距離は等しいから，次の等式が成立する.

$$C^2(2.15\times10^{-6})^2=C^2dt'^2-(6\times10^3)^2$$
$$C^2=(3.0\times10^8)^2$$

$$C^2(2.15\times10^{-6})^2+(6\times10^3)^2=C^2dt'^2$$
$$dt'^2=(2.15\times10^{-6})^2+(6\times10^3)^2/(3.0\times10^8)^2\cong4.6891\times10^{-10}$$
$$dt'\cong2.165\times10^{-5}s$$
$$v=6\times10^3/dt'\cong2.771\times10^8m/s$$

ミュー粒子μは光速に近い速度$\cong2.771\times10^8m/s$で$6km$位の高空から地上に達して崩壊したことになる.

これは決して不可能ではない.

そして静止系に較べて慣性系では時間が速く経過することを示している.

補足４

点質量Mのエネルギー

点質量Mの重力場の加速度はU^2をdRで微分したもの（dU^2/dR）であり，次のとおりである．

$U^2 = 2GM/R$

$dU^2/dR = (d(2GM/R))/dR = -2GM/R^2$

点質量Mから距離Rにある点質量dMには上記加速度が作用する．

点質量dMに作用する力Fは次のとおりである．

$F = 2GMdM/R^2$

力Fが距離dRにわたって質量dMに作用するときのエネルギーdEは次のとおりである．

$dE = FdR$

点質量dMをシュバルトシルト半径R_sから無限遠方まで運ぶためには次のエネルギーE_{dM}が必要である．

$$R_s = 2GM/C^2$$

$$E_{dM} = \int dE = \int_{R_s}^{\infty} FdR = \int_{R_s}^{\infty} (2GMdM/R^2)dR = 2GMdM/R_s = C^2dM$$

以上のとおり，エネルギーE_{dM}は点質量dMをシュバルトシルト半径R_sから無限遠方まで運ぶために必要なエネルギーである．

そうすると，次の等式が成立する．

E_M ： 点質量Mをシュバルトシルト半径R_sから無限遠方に運ぶために必要なエネルギー

$$E_M = \int E_{dM} = \int_0^M C^2dM = MC^2$$

したがって，$E_M(= MC^2)$は点質量Mのエネルギーそのものである．

補足５

$R' = Rcos\delta$ は$R = \gamma Rs\ (1 < \gamma < 2)$の場合に成立する.

$$-\delta = \theta - \omega$$

$$dR'/R'd\theta = -tan\delta = -sin\delta/cos\delta$$

$$(dR'/d\theta)(cos\delta/R') = -sin\delta$$

$$d(logR')/d\theta = -sin\delta/cos\delta = d(log(cos\delta))/d\delta$$

$$logR' = log(cos\delta)\ +\ logA$$

$logA$ ： 積分定数

$$R' = Acos\delta,\quad \theta = \omega = 0,\ R' = R = A$$

$$R' = Rcos\delta = \gamma Rs(cos\delta)$$

上記等式を用いて等式（９）は次のように書き換えられる.

（９）　$d\omega/d\theta = (Rs/R')/(1-(Rs/R'))$

$$d\omega/d\theta = (Rs/Rcos\delta)/(1-(Rs/Rcos\delta))$$

$$= (1/\gamma cos\delta)/(1-1/\gamma cos\delta)$$

$$= 1/(\gamma cos\delta - 1) > 0$$

$$d\delta/d\theta = d\omega/d\theta - 1 = (2-\gamma cos\delta)/(\gamma cos\delta - 1)$$

$$(2-\gamma cos\delta) > 0$$

$$= (2-\gamma cos\delta)(d\omega/d\theta) > \ 0$$

$$d\omega/d\theta - 1 > 0$$

（１３）　　$d\omega/d\theta > 1$

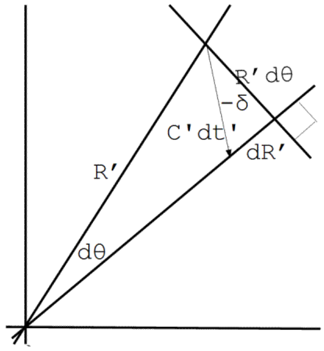

Fig.3

補足６

太陽Mの周辺を伝播する光の伝播方向は図５に示すように次のように曲げられる.

R ： 太陽の質量半径

M ： 太陽の質量

ω_p： 太陽Mの周辺を伝播する光が曲げられる角度

$Rs(=2GM/C^2)$ ： 太陽Mのシュバルトシルト半径

$$Rs \ll R \qquad \omega \ll \theta \qquad \delta = \theta - \omega \cong \theta$$

$R' = R/cos\delta$ ： この等式の導出については**補足２**を参照

$$d\omega/d\theta = \mathrm{Rs}(\cos\delta/\mathrm{R})/(1-\mathrm{Rs}(\cos\delta/\mathrm{R})) \cong (Rs/R)cos\theta$$

$$\omega_p = \int d\omega \cong \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(Rs/R)cos\theta\, d\theta$$

$$= (Rs/R)(sin\,(\pi/2) - sin\,(-\pi/2))$$

$$\omega_p = 2Rs/R = 4GM/C^2R$$

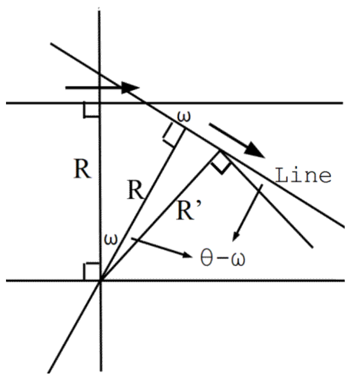

Fig.5

補足７　ブラックホールの質量Mと質量半径R_M

質量Mの径方向の密度をρ/r^2とすると，R_Sが不定になる．

質量Mの径方向の密度をρ/r^3とすると，質量半径R_Mはシュバルトシルト半径R_Sよりも小さいことになる．

質量Mの径方向の密度を一定ρとすると，質量Mは質量半径R_Mの３乗に比例して増大し，質量Mに比例して増大するシュバルトシルト半径R_Sは質量半径R_Mよりも直ぐに大きくなる．それ故，各銀河に存在すると予想される超巨大ブラックホールは存在し得ないことになる．

質量Mの径方向の密度をρ/rとすると，質量半径R_Mとシュバルトシルト半径R_Sの関係は次のようになる．

ρ ： 質量Mの径方向の密度係数
ρ/r ： 質量Mの径方向の密度
R_M ： 質量半径
R_S ： シュバルトシルト半径
r ： 質量Mの中心からの距離
M_S ： 質量半径R_Mとシュバルトシルト半径R_Sが等しいときの質量M

$M = \int_0^{R_M} 4\pi r^2 (\rho/r)\, dr = 2\pi\rho R_M^2$　　　　$R_M = \sqrt{M/2\pi\rho}$

$R_S = 2GM/C^2 = 4\pi G\rho R_M^2/C^2$

$R_S = R_M$　　$R_S = C^2/4\pi G\rho$　　$M_S = C^4/8\pi G^2\rho$

ρが減少すると，それに反比例してR_SとM_Sは増大する．

ρの減少は超巨大ブラックホールの存在を可能にする